二次元多重 sine-Gordon モデルの相転移

九大・理　太 田 隆 夫

研究会ではスクリュー転位のある場合の roughening 転移について述べた後，多重 sine-Gordon モデルの相転移についての preliminary な考えをお話しした。

次のようなハミルトニアンを考える。

$$\mathcal{H} = \int d^2\boldsymbol{r}\left[\frac{J}{8\pi}(\nabla h)^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cos nh\right] \tag{1}$$

ここに，J と $c_n = c_{-n}$ は正の常数，h は実数とする。J と c_n についての繰り込み群流れ方程式は c_n について二次までの範囲で次のようになる。

$$\frac{dJ(l)}{dl} = (b_1/J)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^4 c_m{}^2 \tag{2}$$

$$\frac{dc_n(l)}{dl} = (2-n^2/J)\,c_n + (b_2/J)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} m(n+m)\,c_m c_{n+m} \qquad (n \neq 0) \tag{3}$$

ここに，b_1 と b_2 はある正の数。(2)と(3)から $c_n = 0$ の線は固定線であることがわかる。特に $1/J \geq 2$ ではこの固定線は安定であり，Kosterlitz-Thouless (K−T)固定線と呼ぶ。$1/2 \leq 1/J \leq 2$ では c_1 が relevant になる。この固定線をここでは仮に Baxter（B）固定線と名づける。以下では Baxter モデル，Ashkin-Teller モデル，q state Pottsモデルの臨界異常がB固定線上で記述できる可能性があることを指摘したい。

（i） Baxter モデル

この場合は $c_1 \propto |T-T_c|/T_c \equiv t$ とおいてよいことが確められる。従って(3)より温度指数 $y^B{}_T$ が

$$y_T^B = 2 - 1/J(\infty) \tag{4}$$

と与えられる。($1/J \simeq 1/2$ での補正を無視)，一方 Baxter の厳密な結果[1]は

$$y_T^B = 2\mu/\pi \quad , \quad (0 \leq \mu \leq \pi) \tag{5}$$

ここに　$\cos\mu = -\tanh 2J_4{}^B$　(6)

J_4^B は Baxter モデルの Ising スピン表現にでてくる4体相互作用常数。[2] (4)と(5)より

$$\mu = \pi - \pi/2J(\infty) \tag{7}$$

特に $\mu=0$（Fモデル）で $1/J(\infty)=2$（この点でK−T転移）。すなわち，K−T 転移はFモデルの転移と同じであることがごく自然に理解できる。

（ii）Ashkin-Teller モデル

この場合は Baxter モデルとの duality を利用する。まず，(1)で J を $1/J$ とおきかえる。$c_1 \propto t$ はそのまま。したがって

$$y_T^{\mathrm{AT}} = 2 - J/(\infty) \tag{8}$$

$J(\infty)$ は Ashkin-Teller モデルの4体パラメーター J_4^{AT} と次の関係にあることが示せる。

$$\tanh 2J_4^{\mathrm{AT}} = \cos(\pi/2J(\infty))/[\cos(\pi/2J(\infty))-1] \tag{9}$$

(8)と(9)は J_4^{AT} の関数として y_T^{AT} を決める。特に $\tanh 2J_4^{\mathrm{AT}}=1/2$ のとき $J(\infty)=1/2$ そして $y_T^{\mathrm{AT}}=3/2$。$\tanh 2J_4^{\mathrm{AT}}=1/2$ は 4 state Potts モデルの厳密な転移温度を与えることに注意。

（iii）q state Potts モデル

パラメーター q と Baxter パラメーター μ とは次の関係がある。[3)]

$$\cos\mu = \sqrt{q}/2 \tag{10}$$

(7)と(10)は q と $J(\infty)$ をつなぐ。Potts モデルの reduced 温度 t_{P} に対して次の仮定をおく。

$$t_{\mathrm{P}} \propto c_1\sqrt{c_2} \tag{11}$$

Ashkin-Teller モデルのときのように(1)の J を $1/J$ で置き換える。すると(3)より

$$y_T^{\mathrm{P}} = 3 - 3J(\infty) \tag{12}$$

(8)と(12)より

$$y_T^{\mathrm{P}} = 3(y_T^{\mathrm{AT}} - 1) \tag{13}$$

を得る。これは den Nijs の予想[4)]と一致する。特に $q=4$ のとき $\mu=0$，つまり $J(\infty)=1/2$，故に $y_T^{\mathrm{P}}=3/2$。これは（ii）の結果と consistent 。

以上述べたように，多重 sine-Gordon モデルのB固定線上で，二次元系のモデルの，少なくとも，温度指数 $y_T(=1/\nu)$ は統一的に得られる。他の指数を求める方法が見い出せれば，sine-Gordonモデルに基づく理解は完全なものとなる。

参　考　文　献

1）R.J. Baxter, Phys. Rev. Letters **26**（1971）834.

2） F.W. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312.

3） R.J. Baxter, J. Phys. **C6** (1973) L445.

4） M.P.M. den Nijs, J. Phys. **A12** (1979) 1857.

他に関係ある文献として

5） L.P. Kadanoff and A.C. Brown, Ann. Phys. **121** (1979) 318.

6） J.L. Black and V.J. Emery, Phys. Rev. **B23** (1981) 429.

2次元XY模型の相転移

東大・理　　宮　下　精　二

2次元XY模型及びそれと同じ対称性を持つ系は長距離秩序を伴なわない相転移を示すものとして統計力学の分野ではここ十数年精力的に研究されてきた。[1)~9)] 最近，素粒子の分野でもとじ込めの問題に関連していろいろなタイプの相転移が研究されている[10)]が，通常の1次，2次相転移と異なるタイプの相転移としてこれを紹介したい。ランダウの相転移の分類以来，相転移は秩序変数を通して理解されてきたが，2次元で連続的な内部自由度（ $n \geq 2$ ）を持つ系では有限温度で秩序変数が赤外発散のため消えてしまうことが示された。[1)] それにもかかわらず n が小さい系（ $n=2,3$ ）では，数値実験により何らかの相転移が予想されていた。[2)] ここでは特に $n=2$ の場合に注目し，その代表的なものとして2次元 plane rotator 模型，

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \quad , \tag{1}$$

ここで $<ij>$ はすべての最近接格子点をとる， を例に話を進める。この系では調和近似などで調べても，通常の高温相と明らかに異なるが長距離秩序を持たない相が低温にあることが予想され，[3)] その相転移の性質が興味を持たれた。この新しい低温相の特徴は相関関数の代数的な減少である

$$< \cos(\varphi_i - \varphi_j) > \propto r_{ij}^{-\alpha(T)} \quad , \tag{2}$$

ここで $<\cdots>$ はカノニカル平均， r_{ij} は2点 i j の距離。これは通常の高温相の相関関数， $< \cos(\varphi_i - \varphi_j) > \propto \exp(-r_{ij}/\xi)/r_{ij}^{d-2+\eta}$， と比較して $\xi^{-1}=0$ の相， 或いはマスレス相と呼ばれている。この低温相から高温相への相転移は Kosterlitz-Thouless[4)] が vortex型の